數學傳播 50卷1期, pp. 26-42

畢氏定理的三角學證明: II
畢氏定理:《幾何原本》中究竟證明了什麼?

冼鏡光

上一篇文章 [20] 介紹了一個傳了近百年的錯誤說法: 無法用三角學證明畢氏定理, 也瀏覽了從 19 世紀下半到最近的一些成果, 這些結果充分證明了前述講法的錯誤, 本文則是從 19 世紀往前推、回到古希臘時代的《幾何原本》。

《幾何原本》的作者是歐基里德, 成於公元前 300 年前後。那個時代, 三角學和代數學尚未誕生, 因此《幾何原本》中用線段長度和面積表示今天我們熟知的代數甚至三角學式子, 於是命辭冗長而且讀來繞口。《幾何原本》中最有名的定理之一就是畢氏定理, 命辭 I.47; 此地用 A.b 的方式表示一個《幾何原本》中的命辭, 其中 A 是羅馬數字 (譬如 I、II、III、IV、V、VI 等) 表示第幾冊 (共13冊)、b 表示該冊中命辭的編號, 這是文獻中十分常見的表示方式, 所以 I.47 就是第一冊中命辭 47。

《幾何原本》中有四道命辭和畢氏定理有關, I.47 就是畢氏定理。命辭 II.12 和 II.13 應該合成一道, 因爲 II.12 處理鈍角、II.13 處理銳角, 合起來就去掉了畢氏定理中「直角」的要求, 結果是一道純粹用面積敘述的餘弦定律。第三道命辭是 VI.8, 它沒有證明畢氏定理、而是距畢氏定理只有很小的一步。第四道命辭是 VI.31, 它回到直角三角形, 但是把三邊上的正方形換成相似的多邊形。因此, II.12 加 II.13 和 VI.31 都是畢氏定理的擴充; 在證明上,《幾何原本》用畢氏定理證明 II.12 和 II.13, 但用面積比證明 VI.31。

接下來, 第 1 節用《幾何原本》的方式證明畢氏定理。第 2 節的主題是 II.12 和 II.13, 本文講解《幾何原本》中的命辭和比較近代的敘述方式; 討論使用畢氏定理的證明, 透過「剪刀」的觀念和算法證明 II.12 和 II.13, 這樣就不必動用畢氏定理; 最後是對「剪刀」證明的討論, 並且指出在 17 世紀中葉耶穌會教士就看出「剪刀」的效力、並且寫入書中。第 3 節是命辭 VI.8, 並且用它證明畢氏定理, 這可能是最短的一個證明。第 4 節講解命辭 VI.31, 並且給出用近代術語的證明。第 5 節稍許離題、討論愛因斯坦對畢氏定理的“證明”; 愛因斯坦並沒有發表過畢氏定理的作品, 這些證明是後世重建的, 一個證明和第 3 節的相同、另一個則是 VI.31。最後, 第 6 節是結論。

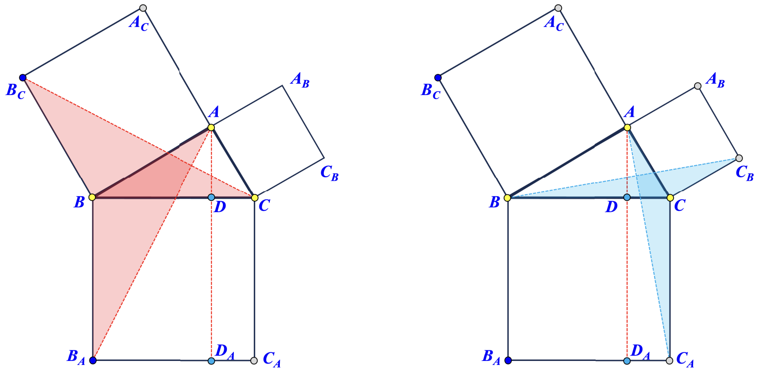
1. 第一冊命辭47 —畢氏定理

《幾何原本》第一冊命辭 47 (I.47) 就是畢氏定理 (Heath [8, pp. 349-350]) :

一個直角三角形中, 斜邊上正方形的面積是兩個直角邊上正方形面積的和。

一般會說成斜邊的平方是兩個直角邊的平方和。在古希臘時代, 由於代數並不發達, 數學家習慣用長度和面積表示代數式子, 所以《幾何原本》中一些命辭的敘述都相當冗長、不若今天用代數的表達簡捷。

圖 1 中 $\triangle ABC$ 是直角三角形、$\angle A = 90°$。斜邊 $\overline{BC}$ 上的正方形是 BCC_AB_A、直角邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上的正方形爲 ABB_CA_C 和 ACC_BA_B。令 A 到 $\overline{BC}$ 的垂足爲 D、$\overleftrightarrow{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 上正方形的對邊交於 D_A。連結 $\overline{AB_A}$ 和 $\overline{CB_C}$, 得到兩個三角形 $\triangle BCB_C$ 和 $\triangle BAB_A$ (圖 1(a))。因爲 $\angle ABB_A = \angle CBB_C = 90° + \angle ABC$, 而且 $\overline{BA} = \overline{BB_C}$ 和 $\overline{BC} = \overline{BB_A}$, 因此 $\triangle BCB_C$ 和 $\triangle BAB_A$ 全等、面積相同。



(a)　(b)

圖 1: 角差等式和角和等式的證明

因爲三角形 $\triangle ABB_A$ 和長方形 BDD_AB_A 有相同的底 $\overline{BB_A}$、相同的高 $\overline{BD}$, $\triangle ABB_A$ 面積爲長方形 BDD_AB_A 的一半; 又因爲 $\triangle ABB_A$ 和 $\triangle CBB_C$ 面積相同, 長方形 BDD_AB_A 和正方形 BAA_CB_C 面積相同。

同理, 長方形 CDD_AC_A 和 $\overline{AC}$ 上正方形的面積相等 (圖 1(b))。因爲在 $\overline{BC}$ 上正方形面積是長方形 BDD_AB_A 和長方形 CDD_AC_A 面積的和, $\overline{BC}$ 上正方形面積是 $\overline{AB}$ 上正方形面積和 $\overline{AC}$ 上正方形面積的和, 這是《幾何原本》第一冊命辭 47 (I.47) 的證明。

2. 第二冊命辭 12 和命辭 13 (餘弦定律)

本節的主題是《幾何原本》中第二個和畢氏定理有關的論題: 命辭 II.12 和命辭 II.13, 這兩者就是餘弦定律, 因爲歐基里德時代三角學尚未誕生,《幾何原本》是用當時慣用的線段長度

和面積描述, 說明有點冗長, 不過本節打算用近代術語說明。下面第 2.1 節說明命辭 II.12 和 II.13; 第 2.2 節講解《幾何原本》中的證明; 第 2.3 節說明《幾何原本》中爲證明畢氏定理發展出來的「剪刀」算法, 並且用它證明 II.12 和 II.13、避免了使用畢氏定理, 但《幾何原本》中原證明卻用了畢氏定理; 第 2.4 節用 II.12 和 II.13導出餘弦定律; 最後, 第 2.5 節討論和 II.12 與 II.13 有關的一些歷史探討。

2.1.《幾何原本》的原命辭

《幾何原本》第二冊中有兩個和畢氏定理有關的命辭: 命辭 12 (II.12) 和命辭 13 (II.13)。兩個命辭都針對三角形中選定的一個角, II.12 是鈍角、II.13 是銳角。我們用銳角 (II.13) 說明就足夠, 下面是 Heath 的英譯, 讀起來有點繞口:

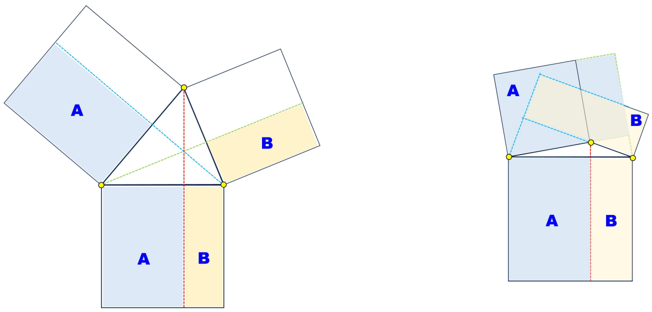
> *In acute-angled triangles the square on the side subtending the acute angle is less than the squares on the sides containing the acute angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the acute angle, namely that on which the perpendicular falls, and the straight line cut off within by the perpendicular towards the acute angle* (Heath [8, p. 406]) .

下面是Google Translate 的翻譯, 是不是辭不達意、甚至譯錯了呢?

> 在銳角三角形中, 銳角所在邊的正方形面積比包含銳角的各邊的正方形面積小兩倍, 即銳角所在邊所圍成的矩形面積的兩倍, 該矩形面積等於垂線所截取的直線面積。

正確的說法如下:

> 在銳角三角形中, 銳角對邊的正方形面積比銳角鄰邊上正方形面積的和小, 差距是由銳角邊和從對角至該邊垂足到銳角頂點長度圍成的長方形面積的兩倍 (圖 2(a))。



(a) 命辭 13　　(b) 命辭 12

圖 2:《幾何原本》第二冊命辭 13 和命辭 12

在鈍角的情況下, 鈍角邊對邊上的正方形面積比鈍角鄰邊上正方形面積的和大, 差距仍然是兩倍於鈍角邊和從對角至該邊垂足到鈍角頂點長度構成的長方形面積, 不過在鈍角的情況下, 垂足在該邊的外部 (圖 2(b))。重要的是, 這兩個命辭就是三角學中的餘弦定律 (第 2.4 節), 歐基里德時代三角學尚未誕生, 只能用長度和面積敘述。

2.2. 《幾何原本》的原始證明

爲方便起見, 我們把 II.12 和 II.13 放在一起、並且用現代的記號和術語說明。首先, 一條線段 $\overline{UV}$ 上的正方形面積寫成 $\overline{UV}^2$, 長方形 $EFGH$ 的面積寫成 $\overline{EF}\cdot\overline{FG}$。《幾何原本》第二冊一開始就建立了一些和在線段上面積有關的結果。

第一個結果很簡單 (圖 3(a))。線段 $\overline{UW}$ 上有點 V, 於是 $\overline{UV}$ 上正方形面積與 $\overline{UV}$ 及 $\overline{VW}$ 構成的長方形面積的和等於 $\overline{UV}$ 及 $\overline{UW}$ 構成的長方形面積, 用現代的術語來說, 就是 $\overline{UV}^2+\overline{UV}\cdot\overline{VW}=\overline{UV}\cdot\overline{UW}$ 或 $(u+v)v=u^2+u\cdot v$。

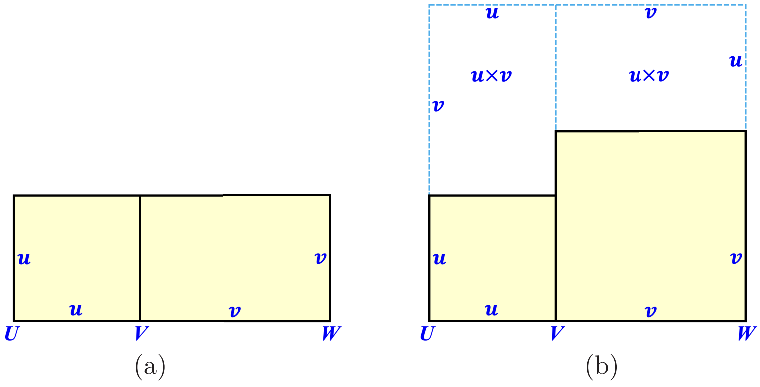


圖 3: 《幾何原本》中兩個有關面積的結果

第二個結果是 $\overline{UW}$ 上正方形的面積是 $\overline{UV}$ 上正方形面積、$\overline{VW}$ 上正方形面積、以及兩倍的由 $\overline{UV}$ 和 $\overline{VW}$ 構成的長方形面積的和 (圖 3(b))。用現代的術語來說, 就是 $\overline{UW}^2=(\overline{UV}+\overline{VW})^2=\overline{UV}^2+\overline{VW}^2+2\overline{UV}\cdot\overline{VW}$ 或 $(u+v)^2=u^2+v^2+2u\cdot v$。

《幾何原本》中對 II.12 和 II.13 的證明用到畢氏定理 (I.47), 但卻非必要。假設已知三角形 $\triangle ABC$, A 是選定的頂點, 依 $\angle A$ 是銳角或鈍角分成三個情況: $\angle A$ 是銳角而且三角形中沒有鈍角 (圖 4(a)); $\angle A$ 是銳角但另兩個角中有鈍角, 令鈍角頂點爲 B (圖 4(b)); $\angle A$ 是鈍角 (圖 4(c))。令 B 到 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂足爲 E, 在前兩個情況下, E 在 A 和 C 之間, $\angle A$ 爲鈍角時 E 則在線段 $\overline{AC}$ 之外。

由於畢氏定理, 我們有 $\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$ 和 $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2$。從第二個面積結果, 我們有 $\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2+2\overline{AE}\cdot\overline{EC}$ (第一和第二種情況)、或 $\overline{EC}^2=\overline{EA}^2+$

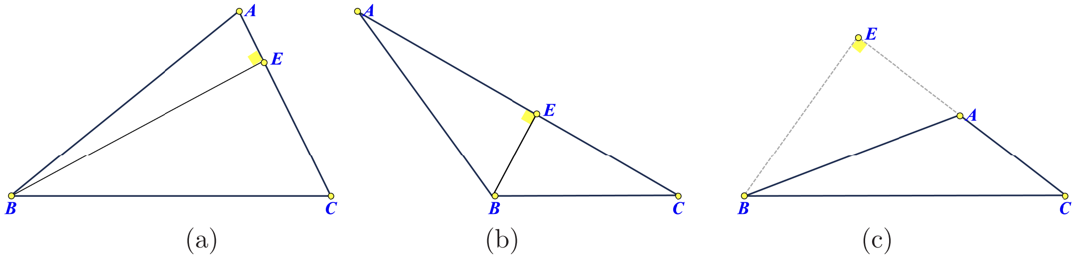


圖 4:《幾何原本》中命辭 II.12 和 II.13 的原始證明

$\overline{AC}^2+2\overline{AE}\cdot\overline{AC}$。在第一和第二種情況下, 結果是:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\left(\overline{BE}^2+\overline{AE}^2\right)+\left(\overline{AE}^2+\overline{EC}^2+2\overline{AE}\cdot\overline{EC}\right)\\&=\left(\overline{BE}^2+\overline{EC}^2\right)+2\left(\overline{AE}^2+\overline{AE}\cdot\overline{EC}\right)\\&=\overline{BC}^2+2\overline{AE}\cdot(\overline{AE}+\overline{EC})\\&=\overline{BC}^2+2\overline{AE}\cdot\overline{AC}\end{aligned}$$

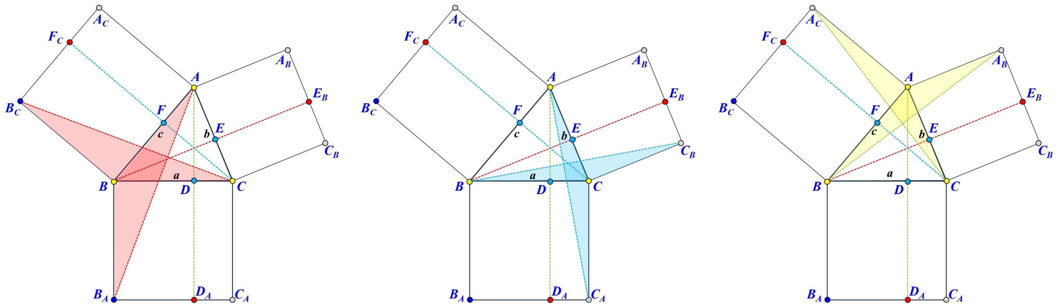
第三種情況則是:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\left(\overline{BE}^2+\overline{AE}^2\right)+\left(\overline{EC}^2-\overline{EA}^2-2\overline{AE}\cdot\overline{AC}\right)\\&=\left(\overline{BE}^2+\overline{EC}^2\right)-2\overline{AE}\cdot\overline{AC}\\&=\overline{BC}^2-2\overline{AE}\cdot\overline{AC}\end{aligned}$$

上面的結果中, A 是選定的三角形頂點、$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 是兩條鄰邊、$\overline{BC}$ 是對邊, 於是 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ 是鄰邊上正方形面積的和, $\overline{BC}^2$ 是對邊上正方形面積。E 是從非選定三角形頂點到對邊 (也就是 A 的一條鄰邊) 上的垂足, 上面 $\overline{AE}\cdot\overline{AC}$ 就是 $\overline{AE}$ (選定頂點到鄰邊上垂足的長度) 和 $\overline{AC}$ (垂足所在鄰邊長度) 圍成的長方形的面積。這樣 II.12 和 II.13 的意義就十分清楚了。最後, 若 A 是銳角, 取加法; 若 A 是鈍角, 取減法。若從 C 到 $\overline{AB}$ 上的垂足爲 F, $\overline{AE}\cdot\overline{AC}$ 得改成 $\overline{AF}\cdot\overline{AB}$, 論證是相同的。換言之, $\overline{AE}\cdot\overline{AC}=\overline{AF}\cdot\overline{AB}$。

2.3. 歐基里德剪刀

本節說明何謂歐基里德剪刀,《幾何原本》中無此稱謂, 是筆者冠上的名稱。已知三角形 $\triangle ABC$, 每一條邊都向外有一個正方形, 於是任一頂點都有四條邊, 兩條是該頂點的鄰邊、另兩條是來自鄰邊上的正方形。以選定的一個頂點爲支點的「歐基里德剪刀」(簡稱做剪刀) 是兩個以該支點爲共同頂點的三角形, 每一個三角形有一條該頂點的鄰邊以及另一條鄰邊上正方形過該頂點的邊。圖 5 分別畫出了在頂點 B、C 和 A 的剪刀。



(a)　　(b)　　(c)

圖 5: 歐基里德剪刀 — 全銳角

選定一個支點後, 從三角形剩下的任何一個頂點向它的對邊作垂線, 這條直線把該頂點對邊上的正方形切成兩個長方形, 由這條垂線和剪刀中與這條線平行的邊構成一個剪刀邊上的長方形。另一個頂點也可以造出一個剪刀上的長方形; 因此非支點的三角形頂點 (或支點的鄰邊) 都對應著兩個剪刀上的長方形。從第 1 節對畢氏定理的證明我們知道: 這兩個剪刀上的長方形面積相等!

接著用歐基里德剪刀證明命辭 II.12 和 II.13。首先是全銳角。頂點 B 的剪刀指出長方形 BDD_AB_A 和長方形 BFF_CB_C 的面積相同 (圖 5(a)); C 的剪刀指出長方形 CDD_AC_A 和長方形 CEE_BC_B 的面積相同 (圖 5(b)); A 的剪刀指出長方形 AFF_CA_C 和長方形 AEE_BA_B 的面積相同 (圖 5(c))。若用 $\mathcal{A}(X)$ 表示X的面積, 全銳角的結果如下:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(BCC_AB_A) &= \mathcal{A}(BDD_AB_A) + \mathcal{A}(CDD_AC_A) = \mathcal{A}(BFF_CB_C) + \mathcal{A}(CEE_BC_B) \\
&= (\mathcal{A}(ABB_CA_C) - \mathcal{A}(AFF_CA_C)) + (\mathcal{A}(ACC_BA_B) - \mathcal{A}(AEE_BA_B)) \\
&= (\mathcal{A}(ABB_CA_C) + \mathcal{A}(ACC_BA_B)) - (\mathcal{A}(AFF_CA_C) + \mathcal{A}(AEE_BA_B)) \\
&= (\mathcal{A}(ABB_CA_C) + \mathcal{A}(ACC_BA_B)) - 2\mathcal{A}(AEE_BA_B) \\
&= (\mathcal{A}(ABB_CA_C) + \mathcal{A}(ACC_BA_B)) - 2\overline{AE}\cdot\overline{AC} \\
\text{or}\ &(\mathcal{A}(ABB_CA_C) + \mathcal{A}(ACC_BA_B)) - 2\overline{AF}\cdot\overline{AB}
\end{aligned}$$

若 A 是銳角但 B 爲鈍角, 從 A 和 C 到它們對邊的垂足 D 和 F 都在三角形之外 (圖 6), 因此剪刀上長方形都比對應邊上的正方形大。在 B 處的剪刀得到長方形 BDD_AB_A 和長方形 BFF_CB_C 的面積相同 (圖 6(a)); 在 C 處的剪刀得到長方形 CDD_AC_A 和長方形 CEE_BC_B 的面積相同 (圖 6(b)); 在 A 處的剪刀得到長方形 AFF_CA_C 長方形 AEE_BA_B 的面積相同 (圖 6(c))。請注意到上述文字和純銳角的相同。所以得到:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(BCC_AB_A) &= \mathcal{A}(CDD_AC_A) - \mathcal{A}(BDD_AB_A) = \mathcal{A}(CEE_BC_B) - \mathcal{A}(BFF_CB_C) \\
&= (\mathcal{A}(ACC_BA_B) - \mathcal{A}(AEE_BA_B)) - (\mathcal{A}(AFF_CA_C) - \mathcal{A}(ABB_CA_C))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathcal{A}(ACC_BA_B) + \mathcal{A}(ABB_CA_C)) - (\mathcal{A}(AEE_BA_B) + \mathcal{A}(AFF_CA_C)) \\
&= (\mathcal{A}(ACC_BA_B) + \mathcal{A}(ABB_CA_C)) - 2\mathcal{A}(AEE_BA_B) \\
&= (\mathcal{A}(ACC_BA_B) + \mathcal{A}(ABB_CA_C)) - 2\overline{AE}\cdot\overline{AC} \\
\text{or}\ &(\mathcal{A}(ACC_BA_B) + \mathcal{A}(ABB_CA_C)) - 2\overline{AF}\cdot\overline{AB}
\end{aligned}
$$

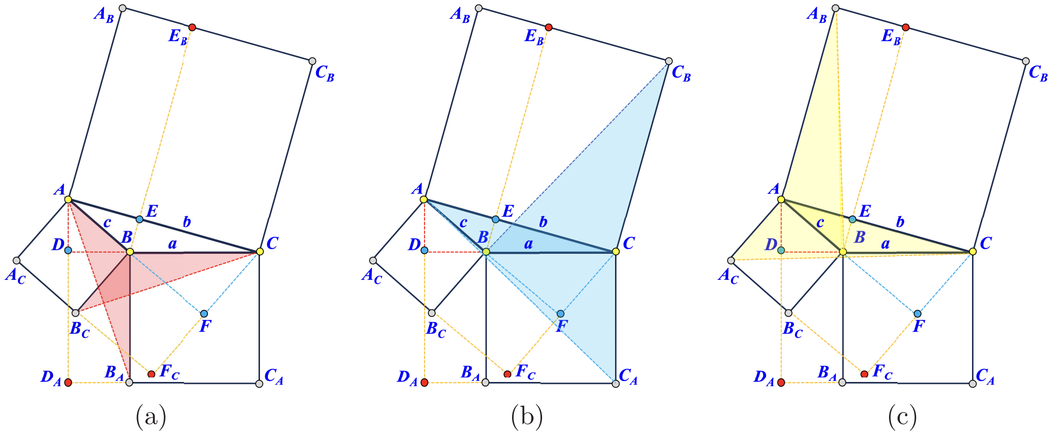


圖 6: 歐基里德剪刀 — 銳角加鈍角

最後是 A 爲鈍角 (圖 7)。這就是把 B 爲鈍角的情況 (圖 6) 旋轉得來, 在證明步驟上並無差異, 因此就不再贅述。

此地的結論是: 若了解「歐基里德剪刀」的意義, 它對畢氏定理、以及命辭 II.12 和 II.13 的證明幾乎是顯而易見的, 特別是證明 II.12 和 II.13 時並不需要用到畢氏定理。

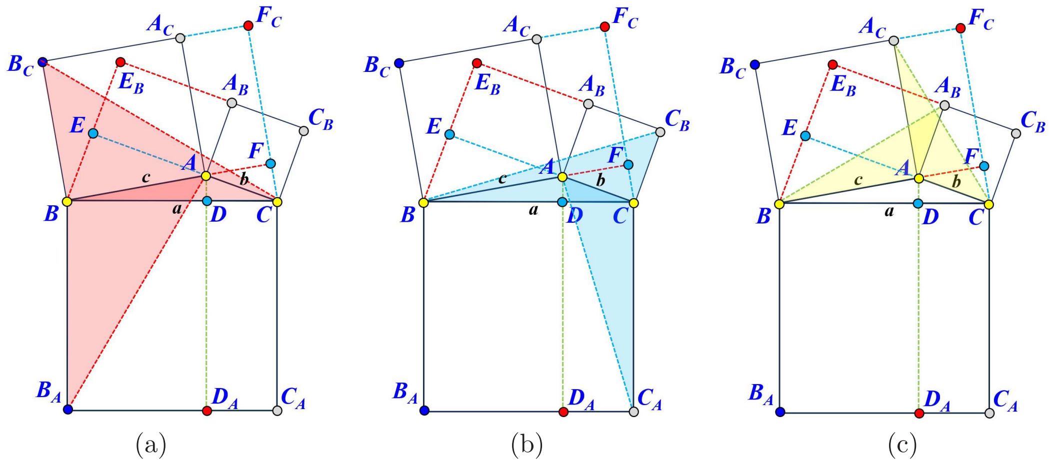


圖 7: 歐基里德剪刀 — 鈍角

2.4. 餘弦定律

命辭 II.12 和 II.13 就是三角學中餘弦定律。爲方便計, 令 $a=\overline{BC}$、$b=\overline{AC}$、$c=\overline{AB}$ 而且 $\alpha=A$。上一節的命辭 II.12 和 II.13 變成 (第一式是 A 爲銳角、第二式爲鈍角):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\overline{AE}\cdot\overline{AC} = b^2 + c^2 - 2\overline{AF}\cdot\overline{AB}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\overline{AE}\cdot\overline{AC} = b^2 + c^2 + 2\overline{AF}\cdot\overline{AB}$$

若 A 爲銳角 (圖 5 和圖 6), $\triangle ABE$中角$\angle AEB = 90°$, 於是 $\overline{AE} = \overline{AB}\cdot\cos(\alpha) = c\cdot\cos(\alpha)$。若考慮三角形 $\triangle AFC$, 則有 $\overline{AF} = \overline{AC}\cdot\cos(\alpha) = b\cdot\cos(\alpha)$。所以, 上面第一式爲:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos(\alpha).$$

若 A 爲鈍角 (圖 7), 垂足 E 和 F 在 $\triangle ABC$ 外, 因此在 $\triangle AEB$ 中 $\angle EAB = 180° - \alpha$, 於是 $\overline{AE} = \overline{AB}\cdot\cos(180° - \alpha) = -\overline{AB}\cdot\cos(\alpha) = -c\cdot\cos(\alpha)$, 上式依然成立。所以, 不論 A 是銳角還是鈍角, 這道式子都成立, 因而證明了餘弦定律。

2.5. 討論

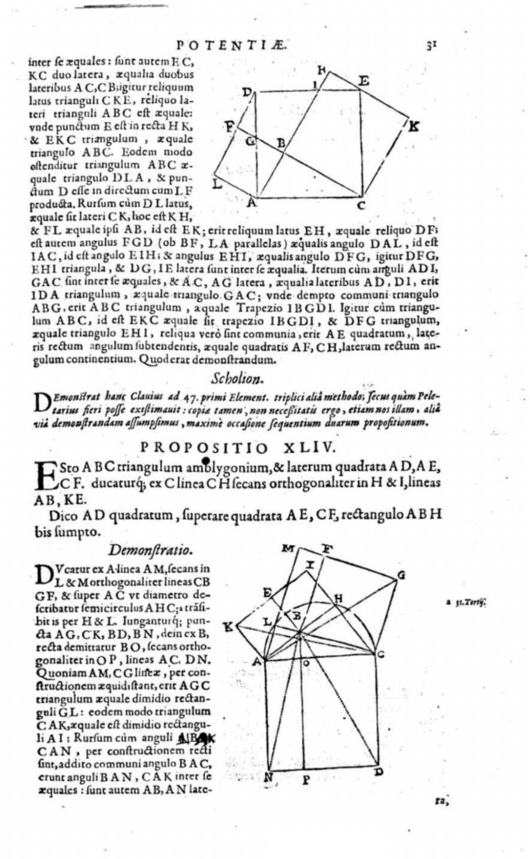
從第 2.1 節和第 2.3 節的討論, 讀者可能會想到一點: 既然歐基里德想出了剪刀的方式、並且用在兩個非直角的頂點, 爲什麼不用同樣的手法證明命辭 II.12 和 II.13 呢? 答案恐怕是無法知道了。不過 Heath [8, p.404] 有過考證, 值得提出來做參考。

簡單地說, 歐基里德的《幾何原本》對 II.12 和 II.13 做的是「證明」。《幾何原本》第二冊的主題是面積, 一開始導出若干有用結果, 很自然地在證明 II.12 和 II.13 時使用在此之前發展出來的面積理論是順理成章的, 就像教科書中發展出理論後用它證明某些結果一樣平常, 雖然這些結果都可能有其它 (或許更好) 的證明。

另一方面, 歐基里德剪刀卻比較像是一個算法 (algorithm), 它指出如何從一個選定的三角形頂點造出一把剪刀、再由此導出剪刀的兩個面積相同的長方形。接著, 歐基里德透過把剪刀用在兩個非直角三角形頂點上證明了畢氏定理; 然而, 若把剪刀算法用在非直角三角形的三個頂點上, 我們可以很容易證明命辭 II.12 和 II.13。因此, Heath 認爲「證明」和「算法」應該都是得重視的貢獻。

固然歐基里德在 II.12 和 II.13 並沒有用到剪刀「算法」, 但根據 Heath 考證, 早在 17 世紀耶穌會教士 Saint-Vincent 出版的一本超過千頁的鉅著中就有用了剪刀的證明, 圖 8 是這本書中第 31 和 32 頁、出版時間是 1646 年 (Saint-Vincent [17])。此後 (特別是在 19 世紀末), 歐洲的平面幾何課本中有不少是既提供《幾何原本》中的證明、也提供了使用剪刀的證明, Henrici and Treutlein [10, p.97, pp.99-100] (1881)、Smith and Bryant [22, pp.142-145] (1901) 和 Taylor [24, pp.158-161] (1893) 都是好例子。不過, Legendre 的 1794 年第一

版 *Éléments de Géométrie* [13, pp.69-70] (這是一本被譯成多種語言的初等幾何名著) 中沒有 II.12 和 II.13, 對 I.47 的畢氏定理沿用《幾何原本》中的原始剪刀證明, 但後期版本 (譬如 1875 年版) 卻改用相似三角形的證明, 請看下一節。


POTENTIÆ. 31

inter se æquales: sunt autem EC, KC duo latera, æqualia duobus lateribus AC, CB: igitur reliquum latus trianguli CKE, reliquo lateri trianguli ABC est æquale: vnde punctum E est in recta HK, & EKC triangulum, æquale triangulo ABC. Eodem modo ostenditur triangulum ABC æquale triangulo DLA, & punctum D esse in directum cum LF producta. Rursum cùm DL latus, æquale sit lateri CK, hoc est KH, & FL æquale ipsi AB, id est EK; erit reliquum latus EH, æquale reliquo DF: est autem angulus FGD (ob BF, LA parallelas) æqualis angulo DAL, id est IAC, id est angulo EIH; & angulus EHI, æqualis angulo DFG, igitur DFG, EHI triangula, & DG, IE latera sunt inter se æqualia. Iterum cùm anguli ADI, GAC sint inter se æquales, & AC, AG latera, æqualia lateribus AD, DI, erit IDA triangulum, æquale triangulo GAC; vnde dempto communi triangulo ABG, erit ABC triangulum, æquale Trapezio IBGDI. Igitur cùm triangulum ABC, id est EKC æquale sit trapezio IBGDI, & DFG triangulum, æquale triangulo EHI, reliqua verò sint communia, erit AE quadratum, lateris rectum angulum subtendentis, æquale quadratis AF, CH, laterum rectum angulum continentium. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

Demonstrat hanc Clauius ad 47. primi Element. triplici aliâ methodo, secus quàm Peletarius fieri posse existimauit: copiæ tamen, non necessitatis ergo, etiam nos illam, aliâ viâ demonstrandam assumpsimus, maximè occasione sequentium duarum propositionum.

PROPOSITIO XLIV.

ESto ABC triangulum amblygonium, & laterum quadrata AD, AE, CF. ducaturq; ex C linea CH secans orthogonaliter in H & I, lineas AB, KE.

Dico AD quadratum, superare quadrata AE, CF, rectangulo ABH bis sumpto.

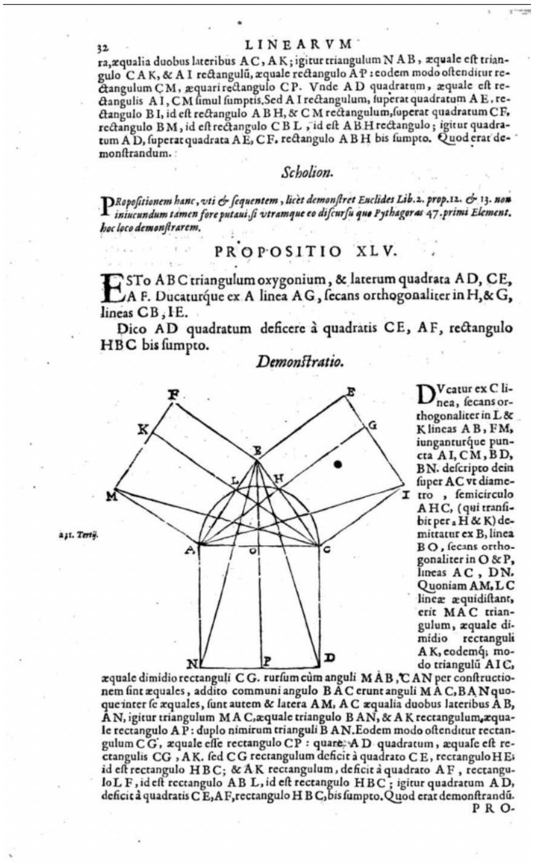
Demonstratio.

DVcatur ex A linea AM, secans in L & M orthogonaliter lineas CB GF, & super AC vt diametro describatur semicirculus AHC; a transibit is per H & L. Iunganturq; puncta AG, CK, BD, BN, dein ex B, recta demittatur BO, secans orthogonaliter in OP, lineas AC, DN. Quoniam AM, CG lineæ, per constructionem æquidistant, erit AGC triangulum æquale dimidio rectanguli GL: eodem modo triangulum CAK, æquale est dimidio rectanguli AI: Rursum cùm anguli ABK CAN, per constructionem recti sint, addito communi angulo BAC, erunt anguli BAN, CAK inter se æquales: sunt autem AB, AN late-

a 31. Tertij.

ra,

p. 31


32 LINEARVM

ra, æqualia duobus lateribus AC, AK; igitur triangulum NAB, æquale est triangulo CAK, & AI rectangulũ, æquale rectangulo AP: eodem modo ostenditur rectangulum CM, æquari rectangulo CP. Vnde AD quadratum, æquale est rectangulis AI, CM simul sumptis. Sed AI rectangulum, superat quadratum AE, rectangulo BI, id est rectangulo ABH, & CM rectangulum, superat quadratum CF, rectangulo BM, id est rectangulo CBL, id est ABH rectangulo; igitur quadratum AD, superat quadrata AE, CF, rectangulo ABH bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

Propositionem hanc, vti & sequentem, licèt demonstret Euclides Lib. 2. prop. 12. & 13. non iniucundum tamen fore putaui, si vtramque eo discursu quo Pythagoras 47. primi Element. hoc loco demonstrarem.

PROPOSITIO XLV.

ESTo ABC triangulum oxygonium, & laterum quadrata AD, CE, AF. Ducaturque ex A linea AG, secans orthogonaliter in H, & G, lineas CB, IE.

Dico AD quadratum deficere à quadratis CE, AF, rectangulo HBC bis sumpto.

Demonstratio.

DVcatur ex C linea, secans orthogonaliter in L & K lineas AB, FM, iunganturque puncta AI, CM, BD, BN. descripto dein super AC vt diametro, semicirculo AHC, (qui transibit per a H & K) demittatur ex B, linea BO, secans orthogonaliter in O & P, lineas AC, DN. Quoniam AM, LC lineæ æquidistant, erit MAC triangulum, æquale dimidio rectanguli AK, eodemq; modo triangulũ AIC, æquale dimidio rectanguli CG. rursum cùm anguli MAB, CAN per constructionem sint æquales, addito communi angulo BAC erunt anguli MAC, BAN quoque inter se æquales, sunt autem & latera AM, AC æqualia duobus lateribus AB, AN, igitur triangulum MAC, æquale triangulo BAN, & AK rectangulum, æquale rectangulo AP: duplo nimirum trianguli BAN. Eodem modo ostenditur rectangulum CG, æquale esse rectangulo CP: quare AD quadratum, æquale est rectangulis CG, AK. sed CG rectangulum deficit à quadrato CE, rectangulo HE: id est rectangulo HBC; & AK rectangulum, deficit à quadrato AF, rectangulo LF, id est rectangulo ABL, id est rectangulo HBC; igitur quadratum AD, deficit à quadratis CE, AF, rectangulo HBC, bis sumpto. Quod erat demonstrandũ.

a 31. Tertij.

PRO-

p. 32

圖 8: Saint-Vincent [17, pp. 31-32]

總而言之, 歐基里德提供了一個畢氏定理的證明和餘弦定律的證明 (使用畢氏定理), 同時也提供了一個能夠證明餘弦定律的剪刀算法、但未使用。筆者認爲這個剪刀算法和原畢氏定理證明同等重要, 或許歐基里德寫作《幾何原本》時的構想就是強調使用第二冊在 II.12 和 II.13 之前所發展出來、有關面積的結果也說不定。歸結起來, 因爲 II.12 和 II.13 可以用剪刀算法繞過畢氏定理得到證明, 歐基里德可以說是第一位證明 (或記錄下) 餘弦定律的人物; 因爲在餘弦定律下, $\alpha = 90^\circ$ 時褪化成畢氏定理, 因此歐基里德也可以說是第一位用三角學證明畢氏定理的人。值得一提的是, 一直到中世紀回教世界數學家和天文學家才發展出近代的三角學、特別是餘弦函數, 才有今天的餘弦定律; 在法國有些教科書還用 Al-Kashi 定理這個名稱, 因爲在他的 1427 的著作 *Key of Arithmetic* 中就有類似餘弦定律的結果 (用到了畢氏等

式); Jamshid al-Kashi (1380-1429) 是波斯的天文學家和數學家。有關三角學的歷史請參看 Brummelen [1, 2, 3]。

有些學者採取極其嚴苛的看法, 他們認為《幾何原本》中沒有用剪刀算法證明畢氏定理, 因此剪刀算法不能算 II.12 和 II.13 的證明, 當然《幾何原本》也不能說是不用畢氏定理而證明餘弦定律。這是見仁見智的問題, 至少 Heath 的名著中就說明了「證明」和「算法」同樣重要。筆者投給一份知名初等數學期刊的文章就發生過這樣的問題, 一位評審指出 II.12 和 II.13 使用畢氏定理, 但是對剪刀算法視若無睹, 縱使提出 Heath 的看法也無濟於事, 當然文章的審查結果不言而喻, 但三位評審中有兩位是同意筆者看法的。

3.《幾何原本》第六冊命辭 8 (VI.8)

《幾何原本》第六冊的主題是比例、含相似三角形等, 其中命辭 8 如下:

> *If in a right-angled triangle a perpendicular be drawn from the right angle to the base, the triangles adjoining the perpendicular are similar both to the whole and to one another* (Heath [9, pp. 109-111]) .

用現代術語來說就是: 從直角頂到斜邊的垂線把直角三角形分成兩個直角三角形, 它們和原直角三角形 (共三者) 相似。請看圖 9, 已知直角三角形 $\triangle ABC$、C 爲直角、D 爲 C 到斜邊的垂足, 於是三個直角三角形 $\triangle ABC$、$\triangle CBD$、$\triangle ACD$ 相似。這道命辭離畢氏定理只一步之遙, 但歐基里德卻沒有往下走; 個人總是覺得《幾何原本》中許多定理就只證明一次, 放在某冊爲某些論題發展出來的那一道脈絡中、不會重複, 或許歐基里德是節省篇幅吧! 因爲那時羊皮紙並不如今天紙張那麼方便。

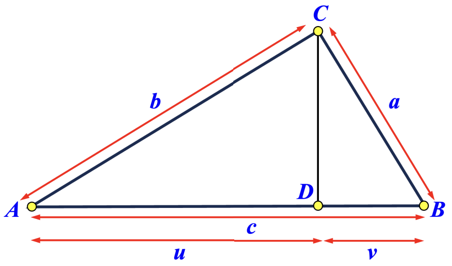


圖 9:《幾何原本》第六冊命辭8 (VI.8)

爲方便計, 令 $a=\overline{BC}$、$b=\overline{AC}$、$c=\overline{AB}$、$u=\overline{AD}$ 而且 $v=\overline{BD}$。因爲 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 得到 $\frac{u}{b}=\frac{b}{c}$; 因爲 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 得到 $\frac{v}{a}=\frac{a}{c}$。於是,

$$a^2+b^2=v\cdot c+u\cdot c=(u+v)c=c^2$$

這就是畢氏定理。在圖 9 中, 若 $c = 1$, 得到 $a = \sin(A)$、$v = \sin^2(A)$、$b = \cos(A)$、$u = \cos^2(A)$, 於是得到畢氏等式, 在 [20] 的第 4 節則用另一個角度證明這道等式。

第 2.5 節指出, 18 世紀末出的第一版 Legendre 初等幾何學名著中使用 I.47 剪刀證明, 但到大約是 19 世紀中葉就改成上面的證法。筆者無法斷定何時更換, 但 1862 年第 15 版是使用《幾何原本》的證明, 到了 1875 年第 19 版就更換了, 因此更換證明應該在 1862 年到 1875 年之間; 然而這顯然不是 Legendre 想出來的證明, 因爲他在 1833 年逝世。Loomis [15, p. 24] 指出這可能是畢氏定理最短的證明。

另一本由美國人 Charles Davies 從 Legendre 原著編譯 (成英文)、知名度很高的教科書在 1842 年版 (圖 10(a) 最下方) 中加小小一步就得到本節證明 (Davies [5]), 但卻沒有走下去。到 1861 年版才給出本節的證明 (Davies [6]), 因爲很不容易找到比 1861 更早的版本 (Loomis [15, p. 24] 說 1858 年就出現), 所以我們大致上可以假定 19 世紀中葉後, 教科書開始採用本節的證明。另外, Robinson [18]、另一本在 19 世紀下半相當普遍的幾何教科書, 也是用同樣的相似三角形證明, 不過頁 49-50 卻是用和《幾何原本》不同 (但類似) 的方式證明畢氏定理。

4.《幾何原本》第六冊命辭 31 (VI.31)

本節討論《幾何原本》中第四個和畢氏定理相關的命辭, VI.31。II.12 和 II.13 是畢氏定理的擴充, 把直角三角形的限制去掉而變成餘弦定律, 命辭 VI.31 仍然處理直角三角形, 但三邊上的不再是正方形、而改成相似的多邊形, 當然 VI.31 仍然是畢氏定理的擴充, 然而初等幾何教科書中比較少講到 VI.31。接下來, 第 4.1 節說明 VI.31, 第 4.2 節用近代的術語證明它、但思路和《幾何原本》的相同。

4.1.《幾何原本》的原命辭

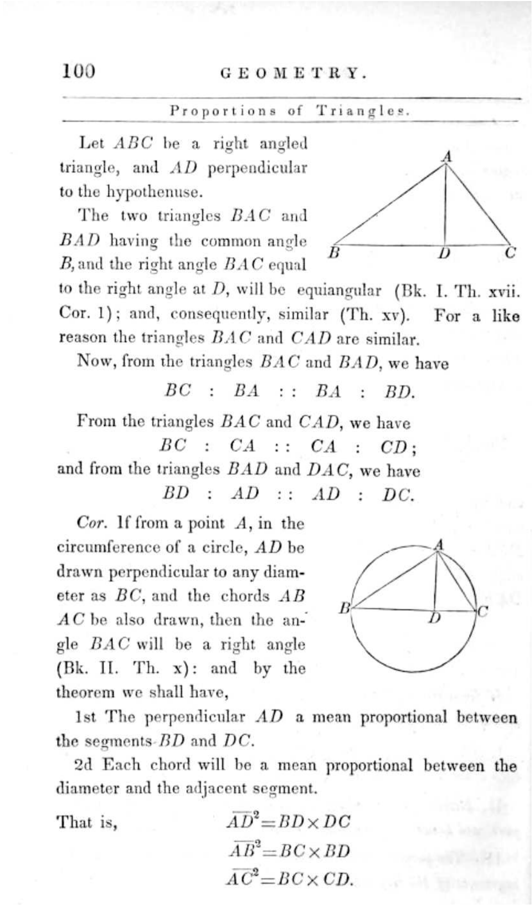
下面是取自 Heath 的譯文, 但讀起來有點怪; 事實上, 類似的譯文可以追溯到 1806 年 Robert Simson 的先期著作 [21, pp.189-190]。

> *In the right-angled triangles the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle* (Heath [9, pp. 268-269]) .

下面是取自 1893 年的譯文, 這就比較符合我們今天的習慣用語了。

> *A polygon on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the polygons similar described on the other sides* (Taylor [24, p. 406]).

假若我們有一個多邊形 (圖 11(a))、又有一個 $\angle C$ 是 90° 的直角三角形 $\triangle ABC$ (圖 11(b))。



100　GEOMETRY.

Proportions of Triangles.

Let ABC be a right angled triangle, and AD perpendicular to the hypothenuse.

The two triangles BAC and BAD having the common angle B, and the right angle BAC equal to the right angle at D, will be equiangular (Bk. I. Th. xvii. Cor. 1); and, consequently, similar (Th. xv). For a like reason the triangles BAC and CAD are similar.

Now, from the triangles BAC and BAD, we have

$$BC : BA :: BA : BD.$$

From the triangles BAC and CAD, we have

$$BC : CA :: CA : CD;$$

and from the triangles BAD and DAC, we have

$$BD : AD :: AD : DC.$$

Cor. If from a point A, in the circumference of a circle, AD be drawn perpendicular to any diameter as BC, and the chords AB AC be also drawn, then the angle BAC will be a right angle (Bk. II. Th. x): and by the theorem we shall have,

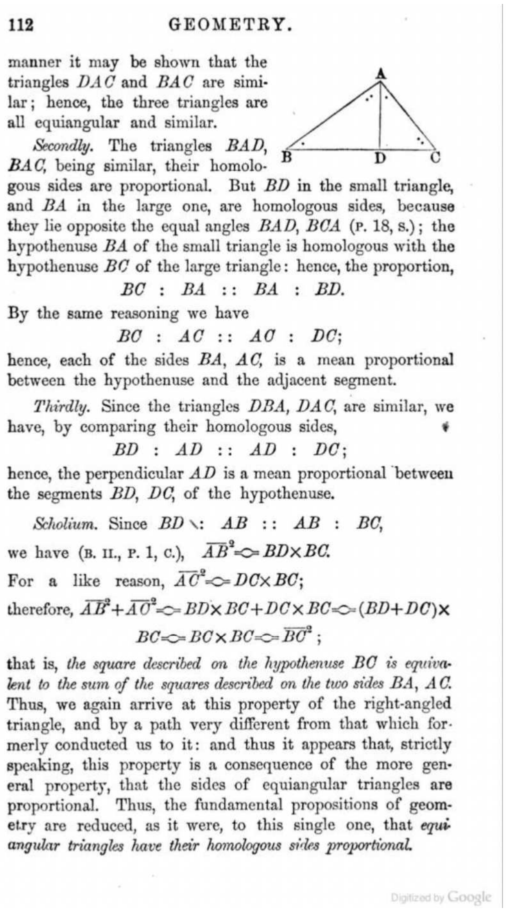
1st The perpendicular AD a mean proportional between the segments BD and DC.

2d Each chord will be a mean proportional between the diameter and the adjacent segment.

That is,

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC$$
$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times CD.$$

Davies [5, p.100]



112　GEOMETRY.

manner it may be shown that the triangles DAC and BAC are similar; hence, the three triangles are all equiangular and similar.

Secondly. The triangles BAD, BAC, being similar, their homologous sides are proportional. But BD in the small triangle, and BA in the large one, are homologous sides, because they lie opposite the equal angles BAD, BCA (P. 18, S.); the hypothenuse BA of the small triangle is homologous with the hypothenuse BC of the large triangle: hence, the proportion,

$$BC : BA :: BA : BD.$$

By the same reasoning we have

$$BC : AC :: AC : DC;$$

hence, each of the sides BA, AC, is a mean proportional between the hypothenuse and the adjacent segment.

Thirdly. Since the triangles DBA, DAC, are similar, we have, by comparing their homologous sides,

$$BD : AD :: AD : DC;$$

hence, the perpendicular AD is a mean proportional between the segments BD, DC, of the hypothenuse.

Scholium. Since $BD : AB :: AB : BC$,

we have (B. II., P. 1, C.), $\overline{AB}^2 \simeq BD \times BC$.

For a like reason, $\overline{AC}^2 \simeq DC \times BC$;

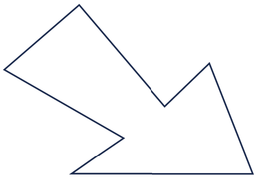
therefore, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \simeq BD \times BC + DC \times BC \simeq (BD+DC) \times BC \simeq BC \times BC \simeq \overline{BC}^2$;

that is, *the square described on the hypothenuse BC is equivalent to the sum of the squares described on the two sides BA, AC.* Thus, we again arrive at this property of the right-angled triangle, and by a path very different from that which formerly conducted us to it: and thus it appears that, strictly speaking, this property is a consequence of the more general property, that the sides of equiangular triangles are proportional. Thus, the fundamental propositions of geometry are reduced, as it were, to this single one, that *equiangular triangles have their homologous sides proportional.*

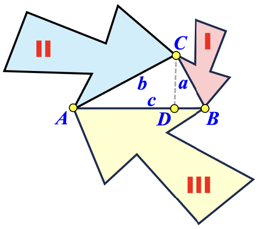
Digitized by Google

Davies [6, p.112]

圖 10: Charles Davies, *Elements of Geometry and Trigonometry*



(a) 多邊形



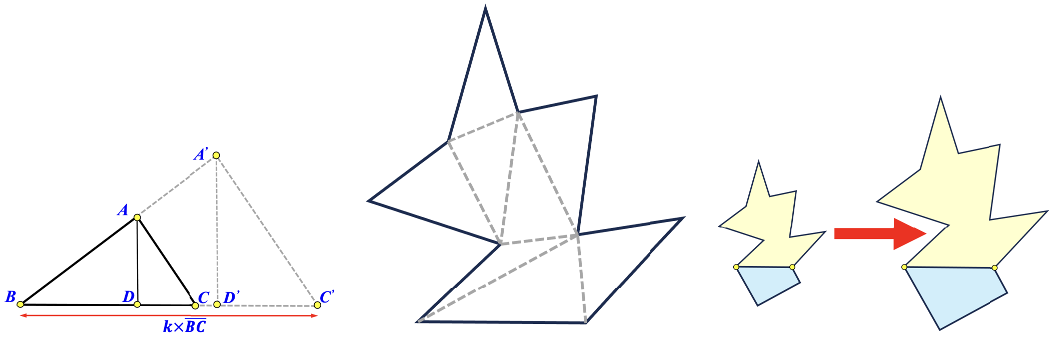
(b) 命辭 VI.31

圖 11:《幾何原本》第六冊命辭31 (VI.31)

如果把多邊形放大縮小、用類似的方式放在直角三角形的邊上; 令 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上經放大或縮小後的多邊形爲 **I**、**II**、**III**, VI.31 是說 **I** 和 **II** 面積的和與 **III** 的面積相等。因爲正方形都是相似的, 於是把 **I**、**II** 和 **III** 都換成正方形時, VI.31 就變成畢氏定理 (I.47)。所以, VI.31 是畢氏定理 (I.47) 的一個推廣。

4.2. 《幾何原本》VI.31 的證明

爲了適應近代的術語, 本節並不重覆《幾何原本》中的原始證明, 思路是相同的、但步驟簡化許多。首先, 比例放大和縮小牽涉到一個大於零的比例因子 (scaling factor) k。若線段$\overline{UV}$被放大或縮小k倍成爲線段 $\overline{EF}$, 我們寫成 $\overline{EF}=k\cdot\overline{UV}$; 一個三角形被放大$k$倍, 指的是另一個相似的三角形, 它每一條邊的邊長都是對應邊的 k 倍。我們的問題是: 若一個三角形被放大 k 倍, 面積會被放大多少倍? 答案是 k^2 倍!



(a) 三角形放大比率 (b) 剖成三角形 (c) 面積比例在放大或縮小時不變

圖 12: 《幾何原本》第六冊命辭 31 (VI.31)

圖 12(a) 中是一個三角形 $\triangle ABC$, 若它有鈍角、A 就是鈍角, 令 A 到對邊的垂足爲 D。若 $\overline{BC}$ 放大或縮小 k 倍成爲 $\overline{BC'}$, 從 C' 作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的平行線和 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 A', 令 A' 到 $\overleftrightarrow{BC'}$ 的垂足爲 D'。因爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC'$ 相似, 得到 $\overline{BC'}=k{\cdot}\overline{BC}$、$\overline{A'C'}=k{\cdot}\overline{AC}$、$\overline{BA'}=k{\cdot}\overline{BA}$ 並且 $\overline{A'D'}=k\cdot\overline{AD}$。所以 $\triangle A'BC'$ 的面積爲 $\frac{1}{2}\overline{A'D'}\cdot\overline{BC'}=\frac{1}{2}\left(k^2\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right)$, 這就說明了邊長放大或縮小 k 倍時, 對應的面積放大或縮小 k^2 倍。若是多邊形 (圖 12(b)), 可以把它剖成若干三角形, 因爲多邊形放大或縮小 k 倍時, 它的剖分中每一個三角形的邊都放大或縮小了 k 倍, 當然每一個剖分中三角形面積都放大或縮小 k^2 倍, 於是多邊形面積也放大或縮小 k^2 倍。每一個多邊形都可以被剖成三角形的集合 (triangulation), 在計算幾何學中如何快速地把一個多邊形剖成三角形的集合曾經是一個熱門研究項目 (Chazelle [4]))。

下一個重要的結果是兩個多邊形面積的比例不會因爲放大縮小而改變 (圖 12(c))。在圖中上下有兩個多邊形 (黃和藍色), 雖然它們有共同邊、但並無此必要。若上下兩者面積分別是 M 和 N、而且比例爲 $r=\frac{M}{N}$; 兩者都放大或縮小 k 倍後, 兩者的面積分別爲 k^2M 和 k^2N, 因此 $r=\frac{M}{N}=\frac{k^2\cdot M}{k^2\cdot N}$, 所以面積比不會因爲放大或縮小而改變。

回到圖 11。令從 $\triangle ABC$ 的直角頂 C 到斜邊的垂足爲 D, $\overline{CD}$ 把 $\triangle ABC$ 切成兩個和 $\triangle ABC$ 相似的直角三角形: $\triangle CBD$ 和 $\triangle ACD$。若在 $\overline{BC}$ 上的多邊形 **I** 和 $\triangle CBD$ 面積的比爲 r, 也就是 $\mathcal{A}(\mathbf{I})=r\cdot\mathcal{A}(\triangle CBD)$, 因爲 **I** 加 $\triangle CBD$、**II** 加 $\triangle ACD$、以及 **III** 加

$\triangle ABC$ 相似, 所以 **II** 和 $\triangle ACD$ 的比、以及 **III** 和 $\triangle ABC$ 面積比相同, 我們得到:

$$\mathcal{A}(\mathbf{I}) = r\cdot\mathcal{A}(\triangle CBD),\quad \mathcal{A}(\mathbf{II}) = r\cdot\mathcal{A}(\triangle ACD)\quad\text{and}\quad \mathcal{A}(\mathbf{III}) = r\cdot\mathcal{A}(\triangle ABC)$$

於是我們就證明了 VI.31 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{I})+\mathcal{A}(\mathbf{II}) &= r\cdot\mathcal{A}(\triangle CBD)+r\cdot\mathcal{A}(\triangle ACD)\\ &= r\,(\mathcal{A}(\triangle CBD)+\mathcal{A}(\triangle ACD))\\ &= r\cdot\mathcal{A}(\triangle ABC)\\ &= \mathcal{A}(\mathbf{III}).\end{aligned}$$

若多邊形換成正方形就是畢氏定理。在這個情況下, 上式變成

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= r\cdot\mathcal{A}(\triangle CBD)+r\cdot\mathcal{A}(\triangle ACD)\\ &= r\,(\mathcal{A}(\triangle CBD)+\mathcal{A}(\triangle ACD))\\ &= r\cdot\mathcal{A}(\triangle ABC) = c^2.\end{aligned}$$

這是一個比用剪刀還簡捷的證明, 但得要用到比例和相似的觀念, 因此這個證明在第六冊、而畢氏定理在第一冊。VI.31 是幾何課本中較少提及的結果。

5. 愛因斯坦的畢氏定理證明

本節打算稍許離題, 談一個有趣、和畢氏定理有關的論題。不少書本、文章和網路上都談論過愛因斯坦對畢氏定理的證明, 但卻人言人殊, 因爲愛因斯坦並沒有發表過任何對畢氏定理的證明, 所以各位看到的愛因斯坦證明其實都是後人猜測式的重建。愛因斯坦對畢氏定理證明的課題很可能源自愛因斯坦本人在 67 歲 (1946 年) 寫的一篇自傳, 原文是德文、由 Arthur Schilpp 譯成英文, 下面是該譯文的片段:

> *At the age of 12 I experienced a second wonder of a totally different nature: in a little book dealing with Euclidean plane geometry, which came into my hands at the beginning of a schoolyear. … I remembered that an uncle told me the Pythagorean theorem before the holy geometric booklet had come into my hands. After much effort I succeeded in "proving" that theorem on the basis of the similarity of triangles; in doing so it seemed to me "evident" that the relations of the sides of the right-angled triangles would have to be completely determined by one of the acute angles* [7, pp. 8-11].

這段文字大意如下: 愛因斯坦的一位伯伯在愛因斯坦十二歲時給他一本幾何學小冊子、提到畢氏定理, 他花了很大功夫用相似三角形證明了這個定理。愛因斯坦自傳中的"證明"是加了

引號的, 也就是“proving”; 用引號的意義人言人殊, 一個比較中肯的說法是愛因斯坦可能並不認爲這是他獨創的方式。然而愛因斯坦並沒有說明他是如何證出來的, Hoffmann 和 Dukes [11, pp.20-24] 對愛因斯坦這一段故事有很生動的描述。

愛因斯坦的證明是如何做的? 最早出現的是 Hoffmann 的一篇文章 [12, pp. 92-93], 他從愛因斯坦對相似直角三角形邊的比例的註解中從新「構作」出一個證明, 結果就是第 3 節的版本, 但是 Hoffmann 卻沒有十足的證據指出這就是愛因斯坦的原始證明。在 Maor [16, p. 41] 這本有關畢氏定理的書中說, 這是《幾何原本》中的第二個畢氏定理的證明, 然而仔細查過《幾何原本》後並沒有發現第二個證明。因爲第 3 節的證明用到 VI.8, 查了 Heath [9, pp.209-211] 發現連證明和註解都沒有 Maor 書中提到的第二個證明; 反倒是 Heath [8, pp.353] 對圖的說明是第 3 節的第二個證明, 但這不是《幾何原本》中的內容。所以,《幾何原本》中並沒有 Maor 所說的第二個證明, 除非 Maor 口中的第二個證明是 VI.31, 但這不是第 3 節中討論的版本。

第二個重建的證明來自 Schroeder 的一本書 [19, pp. 3-4], 基礎仍然是相似三角形、但用的卻是 VI.31 的技巧, 或者可以說根本就是VI.31。Schroeder 版本的來源是在以色列特拉維夫 Weizmann Institute (魏茨曼研究所) 工作的 Schneior Lifson, 而 Lifson 則是從愛因斯坦的助手 Ernst Strauss 聽來, 這位助手說是愛因斯坦親自告訴他的。因此, 我們也很難確定這是愛因斯坦的原始證明。

令 $\triangle$ 爲直角三角形 $\triangle CBD$ 的面積 (圖 9)。因爲 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ACD$ 相似, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{b}{a}$; 換言之, $\overline{AC}=\left(\frac{b}{a}\right)\overline{CB}$, 因此 $\triangle ACD$ 的面積是 $\triangle CBD$ 的 $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 倍, 也就是 $\mathcal{A}(\triangle ACD)=\left(\frac{b}{a}\right)^2\triangle$。同樣的道理, $\triangle ABC$ 的面積是 $\triangle CBD$ 的 $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ 倍, $\mathcal{A}(\triangle ABC)=\left(\frac{c}{a}\right)^2\triangle$。因爲 $\mathcal{A}(\triangle ABC)=\mathcal{A}(\triangle ACD)+\mathcal{A}(\triangle CBD)$, 我們得到 $\left(\frac{c}{a}\right)^2\triangle=\left(\frac{b}{a}\right)^2\triangle+\triangle$, 約去 $\triangle$ 再化簡就是畢氏定理。

這第二個「重建」的證明也不乏爭議; 換言之, 一位 12 歲才拿到一本幾何學書的小孩是否有注意到長度增加 k 倍則面積增加 k^2 倍的能力, 或許有可能但卻無佐證。

走筆至此, 讓筆者想到另一件事。筆者的一篇介紹性文章中談到愛因斯坦的證明, 其中講到上述兩個重建的版本, 一位評審指出筆者應該參考 *New Yorker* 這份通俗雜誌上登載、有關上述第二個證明的長文 (Strogatz [23])。讓筆者納悶的是, 文章是投給一份初等數學期刊, 上面幾列的說明居然被視若無睹、而得引用一份非數學的通俗雜誌, 讓筆者不得其解。筆者並非數學專業, 但研究卻常常跨入幾何學, 爲何初等數學期刊的文章不能接受簡短的數學證明、而得引用非數學專業的一般性雜誌文章呢?

6. 結論

前面解釋了在《幾何原本》中和畢氏定理有關的四道命辭, 四者之一爲畢氏定理 (I.47)、

兩者是畢氏定理的不同擴充 (II.12 和 II.13 以及 VI.31)、第四是距畢氏定理僅一步之遙的結果 (VI.8)。然而, 初等幾何教科書中通常只會看到畢氏定理和命辭 VI.8, 卻鮮少看到 II.12、II.13 和 VI.31, 也忽略了 I.47 引進的「剪刀」概念和 VI.31 的面積比結果, 似乎它們都不曾存在過, 但解釋這些結果也只是舉手之勞, 這不禁讓筆者回想到一件事。筆者大學研讀黎曼面時教授介紹了 Hermann Weyl 的名著 [25], Weyl 在序中說他列了很多早期的參考文獻、然後是下面一段語重心長的話, 各位以爲如何呢?

> *The younger generation is only too inclined to forget the connection of the new with the old* (年輕一代很容易忘記新舊之間的連繫 (Weyl [25, p. ix]))。

更正

畢氏定理的三角學證明: I 中參考文獻 [13]、劉毓璋先生的著作是《解析幾何詳論》、而非《解析幾何群論》, 特此更正。筆者爲這一項校對上的疏失在此致歉。

誌謝

非常感謝評審的寶貴意見。

參考文獻

1. Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press, 2009.
2. Glen van Brummelen, *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*, Princeton University Press, 2012.
3. Glen van Brummelen, *The Doctrine of Triangles: A History of Modern Trigonometry*, Princeton University Press, 2021.
4. Bernard Chazelle, Triangulating a Simple Polygon in Linear Time, *Discrete & Computational Geometry*, Vol. 6 (1991), pp.485-524.
5. Charles Davies, *Elements of Geometry and Trigonometry : with Applications in Mensuration*, Barnes, 1842. (網址: `https://archive.org/details/elementsofgeomet00char/page/100/mode/2up`)
6. Charles Davies, *Elements of Geometry and Trigonometry : with Applications in Mensuration*, Barnes & Burr, 1861. (網址: `https://archive.org/details/bub_gb_FiYqAAAAYAAJ/page/n5/mode/2up`).
7. Albert Einstein, Autobiographical Note, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, edited by Paul Arthur Schilpp, 3rd edition, MJF Books, 1970, pp. 1-96, (由Paul Arthur Schilpp 翻譯, 原德文版和英文版並陳。)
8. Sir Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 1 (Books I and II), Translated from the Text of Heiberg, Volume I, Second Edition (Dover Edition), Dover Publications, New York, 1956.

9. Sir Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 2 (Books III to IX), Translated from the Text of Heiberg, Volume I, Second Edition (Dover Edition), Dover Publications, New York, 1956.
10. Julius Henrici and Peter Truetlein, *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, Erster Teil (Part I), Teubner, Leipzig, 1881. (網址: `https://archive.org/details/lehrbuchderelem01treugoog/page/n97/mode/2up` 1897 版)
11. Banesh Hoffmann and Helen Dukas, *Albert Einstein Creater & Rebel*, Plume, 1973.
12. Banesh Hoffmann, Some Einstein Anomalies, *Albert Einstein: Historical and Cultural Perspective: The Centennial Symposium in Jerusalem*, edited by Gerald Holton and Yehuda Elkana, Princeton University Press, 1982, pp. 91–106.
13. Adrien-Marie Legendre, *Éléments de Géométrie*, Firmin DIDOT, 1794. (網址: `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5720354t`).
14. Adrien-Marie Legendre, *Éléments de Géométrie*, Third Edition, Firmin DIDOT, 1800.
15. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940。網上可以找到 PDF 版, 這個連結是一種可能: `https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf`, 網上也有 1928 年第一版, 但第二版參考價值較高。
16. Eli Maor, *The Pythagorean Theorem: A* $4,000$-*Year History*, Princeton University Press, 2007.
17. Grégoire de Saint-Vincent, *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni Decem Libris Comprehensum*, 1646. (網址: `https://archive.org/details/bub_gb_Bk9vKVkq6mgC/page/n3/mode/2up`)
18. Horatio N. Robinson, *Elements of Geometry*, Ivison, Blakeman, Taylor & Co., 1861.
19. Manfred Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, Dover, 1991.
20. 冼鏡光。畢氏定理的三角學證明: I, 一個傳了近百年的錯誤說法和近來的發展。數學傳播季刊, 49(4), 56-72, 2025。
21. Robert Simson, *Elements of Euclid*, Mathew Carey, Philadelphia, 1806. (網址: `https://ia801306.us.archive.org/2/items/elementsofeuclid00eucl/elementsofeuclid00eucl.pdf`)
22. Charles Smith and Sophie Bryant, *Euclid's Elements of Geometry*, Books I–IV, VI and XI, MacMilland and Co., London, 1901.
23. Steven Strogatz, Einstein's First Proof *The New Yorker*, 2015. (網址: https://www.newyorker.com/tech/annals-of-technology/einsteins-first-proof-pythagorean-theorem)
24. H. M. Taylor, *Euclid's Elementary of Geometry*, Cambridge University Press, London, 1893.
25. Hermann Weyl, *The Concept of a Riemann Surface*, 3rd edition, translated by Gerald R. MacLane, Addison-Wesley, 1955.

—本文作者爲美國密西根理工大學計算機科學系名譽教授—